Cvičenie 3: Dôkazy

Úloha 1. Zistite, či nasledovné výroky sú tautológie:

a) $(\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)a(x)$

b) $(\exists x)a(x) \Rightarrow (\forall x)a(x)$

c) $(\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x))$

d) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\forall x)b(x)) \Rightarrow (\forall x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

e) $(\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x)) \Rightarrow ((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x))$

f) $((\forall x)a(x) \Rightarrow (\exists x)b(x)) \Rightarrow (\exists x)(a(x) \Rightarrow b(x))$

Úloha 2. Dokážte, že nasledovné tvrdenia sú tautológie

a) $[(A \Rightarrow B) \wedge (C \vee D) \wedge ((\neg A \wedge C) \Rightarrow E)] \Rightarrow [\neg B \Rightarrow (E \vee D)]$,

b) $[(\neg A \Rightarrow B) \vee (C \wedge D) \vee (E \wedge \neg C \wedge A)] \Rightarrow [(\neg B \wedge \neg C) \Rightarrow A]$,

c) $[(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \vee C)] \Rightarrow [((C \Rightarrow D) \wedge A) \Rightarrow D]$

Úloha 3. Dokážte nasledovné tvrdenia:

a) $\sqrt{3}$ je iracionálne číslo.

b) $(\forall n \in \mathbb{N})(7 \nmid 42n \Rightarrow 7 \nmid n)$

c) Prvočísel je nekonečne veľa.

d) $(\forall a,\, b \in \mathbb{R}_0^+)\left(\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}\right)$

e) Dokážte, že ak súčin dvoch reálnych čísel x a y je iracionálne číslo, musí byť aspoň jedno z čísel x a y iracionálne.

f) $(\forall a,\, b \in \mathbb{N})[(22 \mid a \wedge 33 \mid b) \Rightarrow 11 \mid (a+b)]$

g) $\log_2 3$ je iracionálne číslo.

h) $(\forall n \in \mathbb{N})(5 \mid n^2 + 1 \Rightarrow 10 \nmid n)$

i) Ak prirodzené číslo n nie je deliteľné tromi, tak n^2 dáva po delení tromi zvyšok 1.

j) $(\forall a,\, b \in \mathbb{N})[(a \bmod 7 = 4 \wedge b \bmod 7 = 5) \Rightarrow ab \bmod 7 = 6]$

k) Ak súčet reálnych čísel a, b, c, d, e je nula, tak aspoň jedno z nich je nezáporné.

l) Nech a, b sú kladné celé čísla opačnej parity. Dokážte, že ak nemožno krátiť zlomok $\dfrac{a}{b}$, tak nemožno krátiť ani zlomok $\dfrac{a-b}{a+b}$.

m) Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich čísel je deliteľný deviatimi.

n) $(\forall a,\, b \in \mathbb{R}^+)\left(\dfrac{a+b}{2} < \dfrac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right)$

Úloha 4. Dokážte identity:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $(A - C) - (B - C) = A - (B \cup C)$

Úloha 5. Zostrojte potenčné množiny $\mathcal{P}(\{1, 2\})$, $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

Úloha 6. Zistite, v akom vzťahu (rovnosť / inklúzia / žiaden) sú množiny:

a) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cap B)$

b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ a $\mathcal{P}(A \cup B)$

Úloha 7. Dokážte, že pre ľubovoľné dve množiny A, B platí $A \subseteq B$ práve vtedy, keď $A \cup B = B$.

Ďalšie úlohy

Úloha 8. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je aj $p+2$ prvočíslo, tak potom existuje nekonečne veľa prvočísel p, pre ktoré je $p + 2$ prvočíslo a navyše $p + 1$ je deliteľné 6-timi.

Úloha 9. Dokážte, že pre každé prvočíslo p je $\sqrt{p}$ iracionálne číslo.

Úloha 10. Dokážte, že ak existuje nekonečne veľa palindromických prvočísel (čítajú sa rovnako spredu aj odzadu), tak existuje aj nekonečne veľa palindromických prvočísel, ktoré majú nepárny počet cifier.

Úloha 11. Dokážte, že ak $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ pre nejaké racionálne čísla a, b, tak aj $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$, aj $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

Úloha 12. Dokážte, že ak x, y sú celé čísla pre ktoré platí $31 \mid 6x + 11y$, potom aj $31 \mid x + y$.

Úloha 13. Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí $a + b + c = 0$. Dokážte, že

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} = -3.$$

Úloha 14. Dokážte, že neexistuje mnohočlen $f(x)$ s celočíselnými koeficientmi, pre ktorý by platilo $f(7) = 11$ a $f(11) = 13$.

Úloha 15. Dokážte, že ak e (eulerova konštanta) nie je riešením polynomiálnej rovnice s celočíselnými koeficientmi, tak ani $2e$ nie je.

Úloha 16. Máme reálne čísla a, b, c také, že čísla

$$\frac{1}{b+c}, \qquad \frac{1}{c+a}, \qquad \frac{1}{a+b}$$

tvoria aritmetickú postupnosť. Dokážte, že aj čísla a^2, b^2, c^2 tvoria aritmetickú postupnosť.

Úloha 17. Je číslo $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ racionálne?