

## 1 Úloha 2 (3.5 bodu)

0.25 1a) Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

0.5 1b) Pro  $n \in \mathbb{N}$  definujme

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

Dokažte, že  $\{u_n\}$  konverguje a spočtěte její limitu.

0.25 2) Dokažte nerovnost:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \leq 1$$

0.5 3a) Dokažte:  $\forall x \in [0, 1] : 0 \leq e^x - 1 \leq ex$

0.25 3b) Z toho odvoďte:  $\forall x \in [0, 1] : 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$

4) Pro  $n \in \mathbb{N}$  definujme

$$w_n = \sum_{k=1}^n \left( e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1 \right).$$

0.25 4a) Dokažte  $\forall n \in \mathbb{N}$  nerovnost:

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^n \left( \frac{n}{n^2 + k^2} \right)^2$$

0.25 4b) Dokažte, že  $x \rightarrow (1+x^2)^{-2}$  je klesající na  $[0, 1]$ .

0.25 4c) Z předchozího odvoďte  $\forall n \in \mathbb{N}$  a  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$  nerovnost:

$$\frac{1}{n} \left( 1 + \left( \frac{k}{n} \right)^2 \right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2} dx$$

0.5 5a) Dokažte  $\forall n \in \mathbb{N}$  nerovnost:

$$0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$$

0.25 5b) Z toho odvoďte, že  $\{w_n\}$  je konvergentní a určete její limitu.