Protože členy posloupnosti a_2, a_6 a a_8 můžeme vyjádřit pomocí *prvního členu* a *diference* takto:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_6 &= a_1 + 5d \\ a_8 &= a_1 + 7d, \end{aligned}$$

můžeme tato vyjádření dosadit do zadání a dostaneme:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_8 &= 15 \\ a_2 + a_6 &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 \cdot (a_1 + 7d) &= 15 \\ (a_1 + d) + (a_1 + 5d) &= 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1^2 + 7a_1 d &= 15 \\ 2a_1 + 6d &= 14 \quad \Rightarrow \quad 6d = 14 - 2a_1 \Rightarrow d = \frac{7 - a_1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1^2 + 7a_1 \frac{7 - a_1}{3} &= 15 \qquad / \cdot 3 \\ 3a_1^2 + 49a_1 - 7a_1^2 &= 45 \\ -4a_1^2 + 49a_1 - 45 &= 0 \end{aligned}$$

To je kvadratická rovnice, čekám tedy dvě posloupnosti, budu je značit římskými čísly:

$$(a_1)_{I,II} = \frac{-49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot (-4) \cdot (-45)}}{-8} = \frac{-49 \pm 41}{-8} = \left\{ \begin{array}{l} = 1 \\ = \frac{45}{4} \end{array} \right.$$

Máme tedy dvě posloupnosti: pro I. posloupnost platí:

$$\boxed{a_1 = 1, \qquad d = \frac{7 - a_1}{3} = 2}$$

Vypíšu prvních pár členů:

$$\underbrace{1}_{a_1}, \underbrace{3}_{a_2}, 5, 7, 9, \underbrace{11}_{a_6}, 13, \underbrace{15}_{a_8}, \ldots$$

Zkoušku provedeme dosazením do zadání:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_8 &= 15 \\ a_2 + a_6 &= 14 \end{aligned}$$

Pro II. posloupnost platí:

$$\boxed{a_1 = \frac{45}{4} = \frac{135}{12}, \qquad d = \frac{7 - \frac{45}{4}}{3} = -\frac{17}{12}}$$

Vypíšu prvních pár členů:

$$\underbrace{\frac{135}{12}}_{a_1}, \underbrace{\frac{118}{12}}_{a_2}, \frac{101}{12}, \frac{84}{12}, \frac{67}{12}, \underbrace{\frac{50}{12}}_{a_6}, \frac{33}{12}, \underbrace{\frac{16}{12}}_{a_8}, \ldots$$

Zkoušku provedeme dosazením do zadání:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_8 &= \frac{135}{12} \cdot \frac{16}{12} = \frac{45}{4} \cdot \frac{4}{3} = 15 \\ a_2 + a_6 &= \frac{118}{12} + \frac{50}{12} = \frac{168}{12} = 14 \end{aligned}$$